２０２６年度岡山大学理学部第３年次編入学
試験問題（一般入試）

専　門　科　目

数　学

（数　学　科）

注意事項

1　問題冊子は１冊、解答用紙は４枚、下書き用紙は４枚です。

2　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

3　各問題の解答は、それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

4　解答用紙のホッチキスは、外さないでください。

5　試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

【数学科】

【試験科目：専門科目（数学）】

解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。

1 4次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の固有空間の基底を一組ずつ求めよ。

(3) A が対角化可能であるか否かを述べよ。対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。対角化可能でないならばその理由を説明せよ。

2 n を2以上の整数とする。$\mathbb{R}^n$ 上の線形変換 f に対し $\mathrm{Ker}\, f$ をその核とする。以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の整数 i について $\mathrm{Ker}\, f^i \subset \mathrm{Ker}\, f^{i+1}$ を示せ。

(2) ある正の整数 j について $\mathrm{Ker}\, f^j = \mathrm{Ker}\, f^{j+1}$ ならば，$\mathrm{Ker}\, f^{j+1} = \mathrm{Ker}\, f^{j+2}$ であることを示せ。

(3) n 次実正方行列 A が $A^{n-1} \neq O$ かつ $A^n = O$ を満たすとし，f を

$$f(v) = Av \ (v \in \mathbb{R}^n)$$

と定める。このとき

$$0 < \dim \mathrm{Ker}\, f < \cdots < \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1} < \dim \mathrm{Ker}\, f^n = n$$

を示せ。ここで O は零行列，$k = 1, \ldots, n$ に対して $\dim \mathrm{Ker}\, f^k$ は $\mathrm{Ker}\, f^k$ の次元である。

3 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n$$

の収束半径を r とする。$0 < a < r$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) r を求めよ。閉区間 $[-a, a]$ においてこの級数は

$$\frac{1}{1+4x^2}$$

に一様収束することを示せ。

(2) 実数 x に対して

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)$$

を示せ。また

$$\tan^{-1}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} \quad (-r < x < r)$$

が成立することを示せ。

(3) 等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

を示せ。

4 閉集合

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

に対して

$$\iint_D \left(\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ。ここで a と b は与えられた正の数である。