

2025年度岡山大学理学部第3年次編入学
試験問題（一般入試）

専 門 科 目

数 学

（ 数 学 科 ）

注意事項

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は4枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 3 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。
- 5 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

【数学科】

【試験科目：専門科目 (数学)】 解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値をすべて求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を一つ求めよ。
- (3) 整数 n に対して A^n を求めよ。

- 2 n を 2 以上の自然数とし, A は n 次実正方行列で $A^2 = A$ を満たすとする。また, A により定まる \mathbb{R}^n 上の線形変換を f で記す。すなわち

$$f(v) = Av \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

である。また $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値は 0 または 1 に限ることを示せ。
- (2) $\text{Im } f = V_1$ を示せ。ここで $\text{Im } f$ は f の像である。
- (3) 行列 A は対角化可能であることを示せ。
- (4) $\text{tr } A = \text{rank } A$ を示せ。ここで, $\text{tr } A$ は A のトレースであり, $\text{rank } A$ は A の階数である。

3 \mathbb{R} 上の関数

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ は狭義単調増加であることを示せ。
- (3) $f'(x) + f(x)^2$ を求めよ。
- (4) 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(y)$ とする。

$$g'(y) = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1)$$

を示せ。また $g(y)$ の $y = 0$ におけるテイラー展開を求めよ。

4 関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

により定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (0, 0)$ を満たす点 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) f の極値をすべて求めよ。