

2022年度岡山大学理学部第3年次編入学
試験問題（一般入試）

専 門 科 目

数 学

（ 数 学 科 ）

注意事項

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は4枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 3 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。
- 5 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

〔数学科〕

〔試験科目：専門科目（数学）〕

解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。

1 以下の問いに答えよ。

(1) 次の極限が存在するかどうかを判定し、存在する場合は極限値を求めよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

(2) 次の広義積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

(3) 次の広義積分が収束することを示せ。

$$\int_0^1 \sin(x) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

(4) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{t \rightarrow +0} e^{\frac{1}{t}} \int_0^t \sin(x) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = 0$$

2 関数 $\tan(x)$ の定義域 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ における逆関数を $\arctan(x)$ と書く。以下の問いに答えよ。

(1) 逆関数の微分法の公式を用いて次の等式を示せ。

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

(3) $\arctan(x)$ のマクローリン展開 ($x=0$ におけるテイラー展開) を求めよ。

(4) $f(x) = x \arctan(x^2)$ とするとき、 $f^{(3)}(0)$ および $f^{(9)}(0)$ を求めよ。ここで、 $f^{(k)}(0)$ は $f(x)$ の $x=0$ における k 階微分係数である。

3 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることを示し、その固有値 α を求めよ。

(2) (1) で求めた α に対して、固有値 α に属する固有空間の基底を一組求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。

4 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める。また、線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) A の階数(ランク)を求めよ。

(2) $\text{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ。

(3) \mathbb{R}^4 内の曲線を

$$C = \left\{ \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ s \\ -s^2 + s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid s \in \mathbb{R} \right) \right\}$$

とおく。 $\text{Im}(f) \cap C$ を求めよ。